Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 673435 14 dicembre 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	a
2	c
3	c
4	a
5	a
6	d
7	d
8	d
9	b
10	b
11	c
12	a

1. La funzione $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ definita da $f(x) = (x + 1)\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)$

► (a) è iniettiva ma non surgettiva

(b) è surgettiva ma non iniettiva

(c) è bigettiva

(d) non è né iniettiva né surgettiva

Soluzione:

$$f(x) = (x+1)\cos\left(\frac{1}{x+1}\right) \qquad f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$$

f è derivabile e

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x+1}\right) + (x+1)\left(-\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \cos\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

osserviamo ora che $x \geq 0$ quindi $0 < \frac{1}{x+1} \leq 1$ allora

$\cos\left(\frac{1}{x+1}\right) > 0$, $\sin\left(\frac{1}{x+1}\right) > 0$, quindi $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [0,+\infty)$.

La funzione f è quindi strettamente crescente, pertanto è iniettiva.

Dalla monotonia di f otteniamo anche che

$\min(f) = f(0) = \cos 1 > 0$ quindi f non è surgettiva perché il codominio di f è $[0,+\infty)$.

2. $$\lim_{x\to 0^+} (x - \sin x)^{\frac{1}{\log x}} =$$

(a) $\sqrt[6]{e}$ (b) $+\infty$ ► (c) e^3 (d) 1

Soluzione:

$$(x-\sin x)^{\frac{1}{\log x}} = e^{\frac{1}{\log x}\log(x-\sin x)}$$

Osserviamo che, per $x \to 0^+$,

$$\log(x-\sin x) = \log\left(x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\right) = \log\left(\frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) =$$

$$= \log\left(x^3\left(\frac{1}{6} + o(x)\right)\right) = \log(x^3) + \log\left(\frac{1}{6} + o(x)\right) = 3\log x + \log\left(\frac{1}{6} + o(x)\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\log x}\log(x-\sin x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\log x + \log\left(\frac{1}{6}+o(x)\right)}{\log x} =$$

$$= 3 + \frac{\log\frac{1}{6}}{-\infty} = 3 + 0 = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} (x-\sin x)^{\frac{1}{\log x}} = e^3.$$

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+\frac{1}{\log x}} \log t\,dt =$

(a) e (b) $+\infty$ ► (c) 1 (d) 0

Soluzione:

Poiché $x \to +\infty$ possiamo considerare $x > 1$ quindi $\log x > 0$

e $x + \frac{1}{\log x} > x$.

Dal teorema della media integrale (l'integranda è continua) esiste $z \in \left(x, x + \frac{1}{\log x}\right)$ t.c.

$$\int_x^{x+\frac{1}{\log x}} \log t \, dt = \log z \cdot \left(\cancel{x} + \frac{1}{\log x} - \cancel{x}\right) = \frac{\log z}{\log x}$$

Avremo quindi
$$\frac{\log x}{\log x} < \frac{\log z}{\log x} < \frac{\log\left(x + \frac{1}{\log x}\right)}{\log x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(x + \frac{1}{\log x}\right)}{\log x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x + \log\left(1 + \frac{1}{x \log x}\right)}{\log x} = 1$$

e ovviamente $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log x}{\log x} = 1$. Dal teorema dei carabinieri otteniamo quindi che

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log z}{\log x} = 1 \quad \text{cioè} \quad \lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+\frac{1}{\log x}} \log t \, dt = 1.$$

In alternativa si poteva calcolare esplicitamente l'integrale ed eseguire il limite:

$$\int_x^{x+\frac{1}{\log x}} \log t \, dt = \Big[t \log t - t\Big]_x^{x+\frac{1}{\log x}} = \ldots\ldots$$

4. La funzione $F(x) = \int_{x^2}^{3} \log(1+t^2)\, dt$

- ► (a) è concava in tutto $\mathbb{R}$
- (b) è convessa in tutto $\mathbb{R}$
- (c) ha esattamente due punti di flesso
- (d) ha un solo punto di flesso

Soluzione:

$$F(x) = \int_{x^2}^{3} \log(1+t^2)\, dt$$

$$F'(x) = -2x \log(1+(x^2)^2) = -2x \log(1+x^4)$$

$$F''(x) = -2\left(\log(1+x^4) + x \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 4x^3\right) = -2\left(\log(1+x^4) + \frac{4x^4}{1+x^4}\right)$$

Dato che $\log(1+x^4) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ otteniamo che

$F''(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, quindi F è concava in tutto $\mathbb{R}$.

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{(\sin x)^6}{x(\log x)^2}\, dx$

- ► (a) converge a un valore minore o uguale a 2
- (b) diverge positivamente
- (c) non esiste
- (d) converge a un valore maggiore o uguale a e

Soluzione:

Poniamo $f(x)=\frac{(\sin x)^6}{x(\log x)^2}$ e osserviamo che $f(x)\geq 0$ in tutto l'intervallo di integrazione, quindi l'integrale converge o diverge positivamente.

Dato che $0\leq f(x)\leq \frac{1}{x(\log x)^2}$, valutiamo l'integrale $\int_{\sqrt{e}}^{+\infty}\frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$. Calcoliamo una primitiva con la sostituzione $\log x = t$, $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$, $\frac{dx}{x}=dt$

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}+c = -\frac{1}{\log x}+c, \text{ quindi}$$

$$\int_{\sqrt{e}}^{M}\frac{dx}{x(\log x)^2} = \left[-\frac{1}{\log x}\right]_{\sqrt{e}}^{M} = -\frac{1}{\log M}+\frac{1}{\log\sqrt{e}} = -\frac{1}{\log M}+2$$

Allora $\int_{\sqrt{e}}^{+\infty}\frac{dx}{x(\log x)^2} = \lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{\log M}+2 = 2$.

Ne segue che l'integrale converge e

$$\int_{\sqrt{e}}^{+\infty}\frac{(\sin x)^6}{x(\log x)^2}\,dx \leq \int_{\sqrt{e}}^{+\infty}\frac{dx}{x(\log^2 x)} = 2.$$

6. L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x^2-x)}{x\log(1+x)}\,dx$

(a) non esiste (b) converge (c) diverge positivamente ▶ (d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2-x)}{x\log(1+x)}\,dx \qquad \text{Sia} \quad f(x)=\frac{\sin(x^2-x)}{x\log(1+x)}.$$

La funzione f non è definita per $x=0$ ed è continua in $(0,1]$, basterà quindi vedere l'andamento di f per $x\to 0^+$:

$$f(x)=\frac{x^2-x+o((x^2-x)^2)}{x\,(x+o(x))}=\frac{x-1+o(x(x-1)^2)}{x+o(x)}=\frac{x-1+o(x)}{x(1+o(1))}=$$

$$=\frac{x-1+o(x)}{x}\;\frac{1}{1+o(1)}=\left(1-\frac{1}{x}+o(1)\right)\frac{1}{1+o(1)}$$

Da questa analisi segue che $f(x)<0$ in un intorno destro di 0 e che ha un andamento asintotico a $-\frac{1}{x}$. Scegliamo quindi $g(x)=-\frac{1}{x}$ e otteniamo che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{1}{x}+o(1)\right)\frac{-x}{1+o(1)}=1.$$

Dato che $\int_0^1 g(x)\,dx=-\infty$, dal criterio del confronto asintotico abbiamo che $\int_0^1 f(x)\,dx$ diverge negativamente.

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{\log n}\right)}-\log n=$

(a) $+\infty$ (b) $-\infty$ (c) 1 ► (d) 0

Soluzione:

Ricordando che $\sin t = t + o(t^2)$ per $t \to 0$ ed eseguendo la sostituzione $t = \frac{1}{\log n}$ per $n \to +\infty$, otteniamo

$\sin\left(\frac{1}{\log n}\right) = \frac{1}{\log n} + o\left(\frac{1}{\log^2 n}\right)$. Ne segue che

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{\log n}\right)} - \log n = \frac{1}{\frac{1}{\log n} + o\left(\frac{1}{\log^2 n}\right)} - \log n =$$

$$= \frac{\log n}{1 + o\left(\frac{1}{\log n}\right)} - \log n = \frac{\log n - \left(1 + o\left(\frac{1}{\log n}\right)\right)\log n}{1 + o\left(\frac{1}{\log n}\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{\log n} - \cancel{\log n} + o(1)}{1 + o\left(\frac{1}{\log n}\right)} \longrightarrow \frac{0}{1+0} = 0 .$$

8. La successione $a_n = \left(5n - \frac{1}{n^2}\right)\log\left(1 - \frac{4}{n}\right)$ con $n \geq 5$

(a) non ha segno costante

(b) è infinitesima

(c) diverge a $-\infty$

► (d) è limitata inferiormente

Soluzione:

$$a_n = \left(5n - \frac{1}{n^2}\right)\log\left(1 - \frac{4}{n}\right) \qquad n \geq 5$$

per $n \to +\infty$

$$a_n = n\left(5 - \frac{1}{n^3}\right)\left(-\frac{4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 5n\left(1 + o(1)\right)\left(-\frac{4}{n}\right)\left(1 + o(1)\right) =$$

$$= -20\left(1 + o(1)\right) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = -20$$

quindi (a_n) è limitata, in particolare lo è inferiormente.

Il risultato è garantito dalla versione per le successioni del teorema di Weierstrass generalizzato.

9. La serie $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1+(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right)$

(a) converge assolutamente

► (b) diverge positivamente

(c) converge ma non converge assolutamente

(d) diverge negativamente

Soluzione:

Osserviamo che

$$\frac{1+(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n-1}{n^2}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

Consideriamo separatamente i tre addendi.

$\sum \frac{1}{n}$ diverge positivamente

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

$\sum (-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$ converge per il criterio di Leibniz infatti

$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\to 0$ ed è decrescente.

Quindi la somma delle tre serie è divergente positivamente.

10. La serie $\sum_{n}\frac{(-1)^n}{2n^2+3n(-1)^n}$

(a) converge semplicemente ma non assolutamente

► (b) converge assolutamente

(c) è indeterminata

(d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{2n^2+3n(-1)^n}$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{2n^2+3n(-1)^n}\right| = \frac{1}{|2n^2+3n(-1)^n|}$$

prendiamo $b_n = \frac{1}{n^2}$ e $a_n = \frac{1}{|2n^2+3n(-1)^n|}$.

Risulta $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$. Dato che $\sum_n b_n$ converge, per il criterio del confronto, $\sum_n \frac{1}{|2n^2+3n(-1)^n|}$ converge, quindi $\sum_n \frac{(-1)^n}{2n^2+3n(-1)^n}$ converge assolutamente.

11. La funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\cos y}\ \sin x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ nel punto $(0,0)$

(a) ha entrambe le derivate parziali ed è continua

(b) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

► (c) ha entrambe le derivate parziali ma non è continua

(d) ha una sola derivata parziale

Soluzione:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-\cos y}\,\sin x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Consideriamo la derivata parziale rispetto a x in $(0,0)$:

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{\sqrt{1-\cos 0}\,\sin h}{h(h^2+0)}=0\to 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0.$$

Per la derivata rispetto a y avremo:

$$\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\frac{\sqrt{1-\cos h}\,\sin 0}{h(0+h^2)}=0\to 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

f ha quindi entrambe le derivate parziali in $(0,0)$.

Vediamo la continuità.

Se consideriamo la curva $r(t)=(t,0)$ (asse x) avremo:

$$\lim_{t\to 0} f(r(t))=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 0}\,\sin t}{t^2+0}=0$$

Se invece consideriamo $\alpha(t)=(t,t)$, $t>0$, otteniamo

$$\lim_{t\to 0^+} f(\alpha(t))=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos t}\,\sin t}{2t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos t}}{2t}\cdot\frac{\sin t}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1-(1-\frac{t^2}{2}+o(t^3))}}{2t}\cdot 1=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{t^2(\frac{1}{2}+o(t))}}{2t}=$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}+o(t)}}{2t}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\neq 0$$

quindi f non è continua in $(0,0)$.

12. Sia $f(x,y)=\log(9y-3x-3)$. Per quale delle seguenti direzioni v risulta $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,1)=0$?

► (a) $v=(3,1)$ (b) $v=(1,1)$ (c) $v=(3,0)$ (d) $v=(1,-3)$

Soluzione:

$$f(x,y) = \log(9y - 3x - 3)$$

$$f_x = \frac{-3}{9y-3x-3} \quad , \quad f_y = \frac{9}{9y-3x-3}$$

$$f_x(1,1) = \frac{-3}{9-3-3} = \frac{-3}{3} = -1 \quad , \quad f_y(1,1) = \frac{9}{9-3-3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

è immediato verificare che $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -3+3 = 0$, quindi

se $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot v = 0$.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 197657 14 dicembre 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	c
2	c
3	c
4	b
5	d
6	c
7	a
8	a
9	d
10	d
11	c
12	b

1. La funzione $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ definita da $f(x) = (x+1)\cos\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

(a) è surgettiva ma non iniettiva

(b) non è né iniettiva né surgettiva

► (c) è iniettiva ma non surgettiva

(d) è bigettiva

Soluzione:

$$f(x) = (x+1)\cos\left(\frac{1}{x+1}\right) \qquad f : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$$

f è derivabile e

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x+1}\right) + (x+1)\left(-\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \cos\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

osserviamo ora che $x \geq 0$ quindi $0 < \frac{1}{x+1} \leq 1$ allora

$\cos\left(\frac{1}{x+1}\right) > 0$, $\sin\left(\frac{1}{x+1}\right) > 0$, quindi $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [0,+\infty)$.

La funzione f è quindi strettamente crescente, pertanto è iniettiva.

Dalla monotonia di f otteniamo anche che

$\min(f) = f(0) = \cos 1 > 0$ quindi f non è surgettiva perché il codominio di f è $[0,+\infty)$.

2. La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\log(x^2+1)}{x} - \arctan x$

(a) è inferiormente limitata ma non è superiormente limitata

(b) ha minimo

► (c) è inferiormente limitata ma non ha minimo

(d) non è limitata né superiormente né inferiormente

Soluzione:

$$f(x) = \frac{\log(x^2+1)}{x} - \operatorname{arctg} x \quad , \quad f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$$

Se $x \to 0^+$ $\quad f(x) = \frac{x^2+o(x^2)}{x} - \operatorname{arctg} x = x + o(x) - \operatorname{arctg} x \to 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x} - \operatorname{arctg} x = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{(per gerarchia di } \infty)$$

Per il teorema di Weierstrass generalizzato f è limitata, in particolare è inferiormente limitata.

Dato che $\frac{\log(x^2+1)}{x} > 0 \quad \forall\, x>0$ otteniamo che

$f(x) > -\operatorname{arctg} x > -\frac{\pi}{2}$. Poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

risulta che $\inf(f) = -\frac{\pi}{2}$. Dato che $f(x) \neq -\frac{\pi}{2}\ \forall x>0$,

f non ha minimo.

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\frac{1}{\log x}} \log t\, dt =$

(a) $+\infty$ (b) e ► (c) 1 (d) 0

Soluzione:

Poiché $x \to +\infty$ possiamo considerare $x > 1$ quindi $\log x > 0$

e $x + \frac{1}{\log x} > x$.

Dal teorema della media integrale (l'integranda è continua)

esiste $z \in \left(x, x + \frac{1}{\log x}\right)$ t.c.

$$\int_x^{x+\frac{1}{\log x}} \log t \, dt = \log z \cdot \left(\cancel{x} + \frac{1}{\log x} \cancel{- x}\right) = \frac{\log z}{\log x}$$

Avremo quindi
$$\frac{\log x}{\log x} < \frac{\log z}{\log x} < \frac{\log\left(x + \frac{1}{\log x}\right)}{\log x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(x + \frac{1}{\log x}\right)}{\log x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x + \log\left(1 + \frac{1}{x \log x}\right)}{\log x} = 1$$

e ovviamente $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{\log x} = 1$. Dal teorema dei

carabinieri otteniamo quindi che

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log z}{\log x} = 1 \quad \text{cioè} \quad \lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+\frac{1}{\log x}} \log t \, dt = 1.$$

In alternativa si poteva calcolare esplicitamente l'integrale ed eseguire il limite:

$$\int_x^{x+\frac{1}{\log x}} \log t \, dt = \Big[t \log t - t\Big]_x^{x+\frac{1}{\log x}} = \dots\dots$$

4. Sia $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_3^{x^2} e^{t^2} + 1 \, dt$. Risulta che

(a) $\min(F) > 0$

► (b) $\min(F) < 0$

(c) F è inferiormente limitata ma non ha minimo

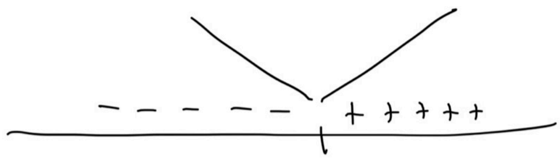
(d) $\inf(F) = -\infty$

Soluzione:

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad F(x) = \int_3^{x^2} e^{t^2} + 1 \, dt$

$F'(x) = \left(e^{(x^2)^2} + 1\right) 2x$

$F'(x) \geq 0 \iff x \geq 0$



quindi $x = 0$ è punto di minimo assoluto per F.

$\min(F) = F(0) = \int_3^0 e^{t^2} + 1 \, dt = -\int_0^3 e^{t^2} + 1 \, dt < 0$

poiché $e^{t^2} + 1 > 0 \quad \forall\, t \in [0,3]$.

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{(\sin x)^6}{x(\log x)^2} \, dx$

(a) diverge positivamente

(b) non esiste

(c) converge a un valore maggiore o uguale a e

► (d) converge a un valore minore o uguale a 2

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \dfrac{(\sin x)^6}{x(\log x)^2}$ e osserviamo che $f(x) \geq 0$ in tutto l'intervallo di integrazione, quindi l'integrale converge o diverge positivamente.

Dato che $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x(\log x)^2}$, valutiamo l'integrale

$\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$. Calcoliamo una primitiva con la sostituzione $\log x = t$, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{dx}{x} = dt$

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{\log x} + c$$, quindi

$$\int_{\sqrt{e}}^{M} \frac{dx}{x(\log x)^2} = \left[-\frac{1}{\log x}\right]_{\sqrt{e}}^{M} = -\frac{1}{\log M} + \frac{1}{\log\sqrt{e}} = -\frac{1}{\log M} + 2$$

Allora $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^2} = \lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{\log M} + 2 = 2$.

Ne segue che l'integrale converge e

$$\int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{(\sin x)^6}{x(\log x)^2}\,dx \leq \int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{dx}{x(\log^2 x)} = 2.$$

6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} \int_2^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin t} =$

(a) 0 (b) $+\infty$ ► (c) 2 (d) $\frac{7}{2}$

Soluzione:

Poniamo $F(x)=\int_2^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{t}+\sin t}$. Risulta che

$$\lim_{x\to\infty} F(x)=\int_2^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}+\sin t}=+\infty. \quad \text{Infatti,}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{t}+\sin t}}{\frac{1}{\sqrt{t}}}=1$$

, quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico tenendo conto che

$$\int_2^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}}=+\infty.$$

Poniamo ora $g(x)=x\sqrt{x}=x^{3/2}$. Dato che $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

abbiamo che $\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{g(x)}=\frac{+\infty}{+\infty}$. Proviamo ad

applicare il teorema di de l'Hôpital.

$$F'(x)=3x^2\,\frac{1}{\sqrt{x^3}+\sin(x^3)}=\frac{3x^2}{x^{3/2}+\sin(x^3)}$$

$$g'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^{3/2}+\sin(x^3)}}{\frac{3}{2}x^{1/2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{3}x^2\cdot 2}{\cancel{3}x^{1/2}(x^{3/2}+\sin(x^3))}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{3/2}}{x^{3/2}+\sin(x^3)}=2.$$

Quindi $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{g(x)}=2$.

7. $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{\log n}\right)}-\log n=$

► (a) 0 (b) $-\infty$ (c) 1 (d) $+\infty$

Soluzione:

Ricordando che $\sin t = t + o(t^2)$ per $t \to 0$ ed eseguendo la sostituzione $t = \frac{1}{\log n}$ per $n \to +\infty$, otteniamo

$$\sin\left(\frac{1}{\log n}\right) = \frac{1}{\log n} + o\left(\frac{1}{\log^2 n}\right).$$ Ne segue che

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{\log n}\right)} - \log n = \frac{1}{\frac{1}{\log n} + o\left(\frac{1}{\log^2 n}\right)} - \log n =$$

$$= \frac{\log n}{1 + o\left(\frac{1}{\log n}\right)} - \log n = \frac{\log n - \left(1 + o\left(\frac{1}{\log n}\right)\right)\log n}{1 + o\left(\frac{1}{\log n}\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{\log n} - \cancel{\log n} + o(1)}{1 + o\left(\frac{1}{\log n}\right)} \longrightarrow \frac{0}{1+0} = 0.$$

8. Data la successione $a_n = \dfrac{1}{\log(n^3)\sin(-\frac{1}{n})}$ definita per $n > 1$, risulta che

► (a) esiste il massimo di (a_n) (b) esiste il minimo di (a_n)

(c) (a_n) è limitata inferiormente (d) non esiste il limite di (a_n)

Soluzione:

$$a_n = \frac{1}{\log(n^3)\sin\left(-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{3\log n\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{3\log n}{n}\left(-1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \frac{n}{3\log n}\,\frac{1}{\left(-1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \longrightarrow (+\infty)\frac{1}{-1+0} = -\infty$$

quindi (a_n) ha massimo.

9. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1+(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right)$

(a) converge ma non converge assolutamente

(b) diverge negativamente

(c) converge assolutamente

► (d) diverge positivamente

Soluzione:

Osserviamo che

$$\frac{1+(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n-1}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + (-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

Consideriamo separatamente i tre addendi.

$\sum \frac{1}{n}$ diverge positivamente

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

$\sum (-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$ converge per il criterio di Leibniz infatti

$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \to 0$ ed è decrescente.

Quindi la somma delle tre serie è divergente positivamente.

10. La serie $\sum_n \frac{4^{3n}}{2n^2 7^n}$

(a) converge semplicemente ma non assolutamente

(b) è indeterminata

(c) converge assolutamente

► (d) diverge a $+\infty$

Soluzione:

$a_n = \frac{4^{3n}}{2n^2 7^n}$. Osserviamo che $a_n \geq 0$ e applichiamo il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{4^{3n}}{2n^2 7^n}} = \frac{4^3}{7}\frac{1}{\sqrt[n]{2n^2}} = \frac{64}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{2n^2}} \to \frac{64}{7}\cdot\frac{1}{1} = \frac{64}{7} > 1$$

quindi $\sum_n a_n$ diverge positivamente.

11. La funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\cos y}\ \sin x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ nel punto $(0,0)$

(a) ha entrambe le derivate parziali ed è continua

(b) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

► (c) ha entrambe le derivate parziali ma non è continua

(d) ha una sola derivata parziale

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\cos y}\,\sin x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Consideriamo la derivata parziale rispetto a x in $(0,0)$:

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{\sqrt{1-\cos 0}\,\sin h}{h(h^2+0)} = 0 \to 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Per la derivata rispetto a y avremo:

$$\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \frac{\sqrt{1-\cos h}\,\sin 0}{h(0+h^2)} = 0 \to 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

f ha quindi entrambe le derivate parziali in $(0,0)$.

Vediamo la continuità.

Se consideriamo la curva $r(t) = (t,0)$ (asse x) avremo:

$$\lim_{t\to 0} f(r(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 0}\,\sin t}{t^2+0} = 0$$

Se invece consideriamo $\alpha(t) = (t,t)$, $t>0$, otteniamo

$$\lim_{t\to 0^+} f(\alpha(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos t}\,\sin t}{2t^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos t}}{2t}\cdot\frac{\sin t}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{1-(1-\frac{t^2}{2}+o(t^3))}}{2t}\cdot 1 = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t^2(\frac{1}{2}+o(t))}}{2t} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t\sqrt{\frac{1}{2}+o(t)}}{2t} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

quindi f non è continua in $(0,0)$.

12. I punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^3 + 2xy - 2y^2$ sono

(a) infiniti ▶ (b) due (c) nessuno (d) un solo punto

Soluzione:

$f(x,y) = x^3 + 2xy - 2y^2$

$f_x = 3x^2 + 2y$

$f_y = 2x - 4y$

$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 3x^2 + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + 2y = 0 \\ x = 2y \end{cases}$

sostituiamo la 2ª nella 1ª ottenendo

$3 \cdot 4y^2 + 2y = 0 \iff 2y(6y+1) = 0 \iff y = 0 \vee y = -\frac{1}{6}$

se $y = 0$, $x = 2y \Rightarrow x = 0$, quindi $(0,0)$ è soluzione.

se $y = -\frac{1}{6}$, $x = 2y \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$, quindi $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$ è soluzione.

La funzione ha 2 punti stazionari.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 428258 14 dicembre 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	a
2	a
3	c
4	c
5	d
6	d
7	c
8	b
9	a
10	c
11	a
12	d

1. La funzione $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ definita da $f(x) = (x+1)\cos\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

► (a) è iniettiva ma non surgettiva

(b) è surgettiva ma non iniettiva

(c) non è né iniettiva né surgettiva

(d) è bigettiva

Soluzione:

$$f(x) = (x+1)\cos\left(\frac{1}{x+1}\right) \qquad f : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$$

f è derivabile e

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x+1}\right) + (x+1)\left(-\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \cos\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

osserviamo ora che $x \geq 0$ quindi $0 < \frac{1}{x+1} \leq 1$ allora

$\cos\left(\frac{1}{x+1}\right) > 0$, $\sin\left(\frac{1}{x+1}\right) > 0$, quindi $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [0,+\infty)$.

La funzione f è quindi strettamente crescente, pertanto è iniettiva.

Dalla monotonia di f otteniamo anche che

$\min(f) = f(0) = \cos 1 > 0$ quindi f non è surgettiva

perché il codominio di f è $[0,+\infty)$.

2. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{\frac{x^5+\sin x}{x^4+(\cos x)^2}}$

► (a) è limitata inferiormente ma non ha minimo

(b) ha sia massimo che minimo

(c) ha minimo ma non ha massimo

(d) è limitata superiormente ma non inferiormente

Soluzione:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f(x) = e^{\frac{x^5+\sin x}{x^4+(\cos x)^2}}$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+\sin x}{x^4+(\cos^2 x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\cancel{5}}\left(1+\frac{\sin x}{x^5}\right)}{\cancel{x^4}\left(1+\frac{\cos^2 x}{x^4}\right)} = \frac{\infty\cdot(1+0)}{(1+0)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^5+\sin x}{x^4+\cos^2 x} = \cdots = \frac{-\infty\,(1+0)}{1+0} = -\infty.$$

quindi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{+\infty} = +\infty \Rightarrow f$ non ha massimo.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$

Per il teorema di Weierstrass generalizzato f è limitata inferiormente. Sempre per lo stesso teorema f ha minimo $\Leftrightarrow \exists\, \bar{x}$ t.c. $f(\bar{x})\leq 0$, cioè

$e^{\frac{x^5+\sin x}{x^4+\cos^2 x}} \leq 0$ che non ha soluzione perché

$e^t > 0 \quad \forall\, t\in\mathbb{R}$. Quindi f non ha minimo.

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\frac{1}{\log x}} \log t\, dt =$

(a) $+\infty$ (b) e ► (c) 1 (d) 0

Soluzione:

Poiché $x \to +\infty$ possiamo considerare $x > 1$ quindi $\log x > 0$ e $x + \frac{1}{\log x} > x$.

Dal teorema della media integrale (l'integranda è continua) esiste $z \in \left(x, x + \frac{1}{\log x}\right)$ t.c.

$$\int_x^{x+\frac{1}{\log x}} \log t \, dt = \log z \cdot \left(\cancel{x} + \frac{1}{\log x} - \cancel{x}\right) = \frac{\log z}{\log x}$$

Avremo quindi $\frac{\log x}{\log x} < \frac{\log z}{\log x} < \frac{\log\left(x + \frac{1}{\log x}\right)}{\log x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(x + \frac{1}{\log x}\right)}{\log x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x + \log\left(1 + \frac{1}{x \log x}\right)}{\log x} = 1$$

e ovviamente $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{\log x} = 1$. Dal teorema dei carabinieri otteniamo quindi che

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log z}{\log x} = 1 \quad \text{cioè} \quad \lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+\frac{1}{\log x}} \log t \, dt = 1.$$

In alternativa si poteva calcolare esplicitamente l'integrale ed eseguire il limite:

$$\int_x^{x+\frac{1}{\log x}} \log t \, dt = \Big[t \log t - t\Big]_x^{x+\frac{1}{\log x}} = \ldots\ldots$$

4. La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_0^x t(1-t^2)e^{\cos(t^2)}\,dt$

(a) ha un solo punto di minimo locale e un solo punto di massimo locale

(b) non ha né massimi né minimi locali

► (c) ha due punti di massimo locale e uno di minimo locale

(d) ha un solo punto di massimo locale e nessun minimo locale

Soluzione:

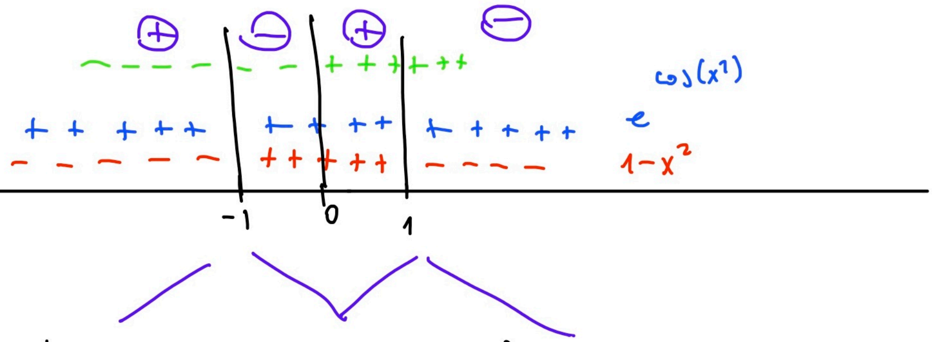
$$F(x) = \int_0^x t(1-t^2)\,e^{\cos(t^2)}\,dt$$

$$F'(x) = x(1-x^2)\,e^{\cos(x^2)}$$

$1-x^2 \geq 0 \iff -1 \leq x \leq 1$

$e^{\cos(x^2)} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Il segno di F' è quindi



F ha due punti di massimo locale ($x=-1$ e $x=1$) e uno di minimo locale ($x=0$).

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{(\sin x)^6}{x(\log x)^2}\,dx$

(a) non esiste

(b) diverge positivamente

(c) converge a un valore maggiore o uguale a e

► (d) converge a un valore minore o uguale a 2

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \dfrac{(\sin x)^6}{x(\log x)^2}$ e osserviamo che $f(x) \geq 0$ in tutto l'intervallo di integrazione, quindi l'integrale converge o diverge positivamente.

Dato che $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x(\log x)^2}$, valutiamo l'integrale

$\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$. Calcoliamo una primitiva con la sostituzione $\log x = t$, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{dx}{x} = dt$

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{\log x} + c$$, quindi

$$\int_{\sqrt{e}}^{M} \frac{dx}{x(\log x)^2} = \left[-\frac{1}{\log x}\right]_{\sqrt{e}}^{M} = -\frac{1}{\log M} + \frac{1}{\log\sqrt{e}} = -\frac{1}{\log M} + 2$$

Allora $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^2} = \lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{\log M} + 2 = 2$.

Ne segue che l'integrale converge e

$$\int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{(\sin x)^6}{x(\log x)^2}\,dx \leq \int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{dx}{x(\log^2 x)} = 2.$$

6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x} - x^2}{(\sin x)^2}\,dx$

(a) diverge negativamente (b) non esiste (c) converge ► (d) diverge positivamente

Soluzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - x^2}{(\sin x)^2} .$$

La funzione è continua in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Esaminiamo il comportamento per $x \to 0^+$.

$$f(x) = \frac{x^{1/2}(1 - x^{3/2})}{(x + o(x^2))^2} = \frac{x^{1/2}(1 - x^{3/2})}{x^2(1 + o(x))^2} = \frac{1 - x^{3/2}}{x^{3/2}(1 + o(x))^2}$$

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ e osserviamo che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - x^{3/2}}{\cancel{x^{3/2}}(1 + o(x))^2} \cdot \cancel{x^{3/2}} = \frac{1 - 0}{(1 + 0)^2} = 1$$

Dato che $g(x) > 0$ $\forall x > 0$ e $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ segue che $f(x) > 0$ in un intorno destro di 0. Possiamo quindi applicare il criterio del confronto asintotico concludendo che $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$ diverge positivamente dato che $\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx = +\infty$.

7. $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{\log n}\right)} - \log n =$

(a) $+\infty$ (b) 1 ► (c) 0 (d) $-\infty$

Soluzione:

Ricordando che $\sin t = t + o(t^2)$ per $t \to 0$ ed eseguendo la sostituzione $t = \frac{1}{\log n}$ per $n \to +\infty$, otteniamo

$$\sin\left(\frac{1}{\log n}\right) = \frac{1}{\log n} + o\left(\frac{1}{\log^2 n}\right).$$ Ne segue che

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{\log n}\right)} - \log n = \frac{1}{\frac{1}{\log n} + o\left(\frac{1}{\log^2 n}\right)} - \log n =$$

$$= \frac{\log n}{1 + o\left(\frac{1}{\log n}\right)} - \log n = \frac{\log n - \left(1 + o\left(\frac{1}{\log n}\right)\right)\log n}{1 + o\left(\frac{1}{\log n}\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{\log n} - \cancel{\log n} + o(1)}{1 + o\left(\frac{1}{\log n}\right)} \longrightarrow \frac{0}{1+0} = 0.$$

8. $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!\, n^{\frac{1}{n}}} =$

(a) e^3 ▶ (b) 0 (c) $+\infty$ (d) non esiste

Soluzione:

$$a_n = \frac{3^n}{n!\, n^{1/n}}$$

Ricordiamo che $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Poniamo $b_n = \frac{3^n}{n!}$

Utilizzando il criterio del rapporto per b_n otteniamo

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1} \to 0$$, quindi $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ e,

di conseguenza

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{0}{1} = 0.$$

9. La serie $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1+(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right)$

► (a) diverge positivamente

(b) diverge negativamente

(c) converge ma non converge assolutamente

(d) converge assolutamente

Soluzione:

Osserviamo che

$$\frac{1+(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n-1}{n^2}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

Consideriamo separatamente i tre addendi.

$\sum \frac{1}{n}$ diverge positivamente

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

$\sum (-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$ converge per il criterio di Leibniz infatti

$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\to 0$ ed è decrescente.

Quindi la somma delle tre serie è divergente positivamente.

10. La serie $\sum_{n}\frac{4^{(4n)}}{3\sqrt{n}+1}$

(a) diverge negativamente

(b) converge assolutamente

► (c) diverge positivamente

(d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_n \frac{4^{4n}}{3\sqrt{n}+1}$$

Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{4n}}{3\sqrt{n}+1}=+\infty$$

quindi la serie non converge.

Dato che la serie è a termini positivi otteniamo che diverge positivamente.

11. La funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\cos y}\ \sin x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ nel punto (0,0)

► (a) ha entrambe le derivate parziali ma non è continua (b) ha una sola derivata parziale
(c) ha entrambe le derivate parziali ed è continua (d) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\cos y}\ \sin x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Consideriamo la derivata parziale rispetto a x in (0,0):

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{\sqrt{1-\cos 0}\ \sin h}{h(h^2+0)} = 0 \to 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Per la derivata rispetto a y avremo:

$$\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \frac{\sqrt{1-\cos h}\ \sin 0}{h(0+h^2)} = 0 \to 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

f ha quindi entrambe le derivate parziali in (0,0).

Vediamo la continuità.

Se consideriamo le curva $r(t) = (t,0)$ (asse x) avremo:

$$\lim_{t\to 0} f(r(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 0}\ \sin t}{t^2+0} = 0$$

Se invece consideriamo $\alpha(t) = (t,t)$, $t>0$, otteniamo

$$\lim_{t\to 0^+} f(\alpha(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos t}\ \sin t}{2t^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos t}}{2t} \cdot \frac{\sin t}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^3)\right)}}{2t} \cdot 1 = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t^2\left(\frac{1}{2}+o(t)\right)}}{2t} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t\sqrt{\frac{1}{2}+o(t)}}{2t} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

quindi f non è continua in (0,0).

12. L'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0, -1 < z < 1\}$

(a) è chiuso

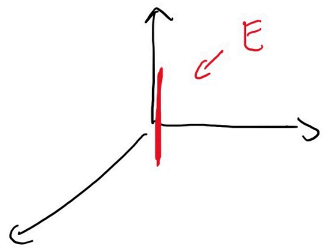
(b) è aperto

(c) non ha punti di accumulazione

► (d) non è né aperto né chiuso

Soluzione:

$x=0, y=0$ descrive l'asse z in $\mathbb{R}^3$, quindi l'insieme E è un segmento di retta (la parte dell'asse z compreso tra le quote -1 e 1, estremi esclusi).



E non è aperto perché tutti i suoi punti non sono interni (ne basterebbe anche uno solo). Ad esempio $(0,0,0) \in E$ ma, per ogni $r>0$ $B_r(0) \not\subset E$

E non è chiuso perché non contiene tutti i suoi punti di frontiera. Ad esempio $(0,0,1) \in \partial E$ ma $(0,0,1) \notin E$.